

ОПТИЧКИ Q ФАКТОР И ВЕРОВАТНОЋА ГРЕШКЕ - ПРЕДНОСТИ И НЕДОСТАЦИ

Андрија Кунарац, Телеком Србија а.д.
Александар Маринчић, САНУ

Садржај – Проблем мерења малих вероватноћа грешки наметнуо је трагање за поступцима који се не базирају на директном мерењу бар десетак погрешно примљених импулса у неком интервалу времена, јер су то, при савременим дигиталним протоцима, дуги инетвали. У раду је дата теорија са резултатима симулације мерних поступака који повећавају вероватноће грешке тако што се намерно мења праг пријема или тренуци одлучивања. За ове мерне поступке користе се специјални пријемници који мере индиректно оптички Q фактор који је директно везан са вероватноћом грешке. Коментариран је и поступак директног мерења оптичког Q фактора уз помоћ семплинг осцилоскопа.

1. УВОД

Са све већом применом дигиталних система са великим дигиталним протоцима, проблеми мерења вероватноће грешке постају све сложенији због повећаног времена за мерење вероватноће грешке по класичном методу чекања да се грешка појави. Пре десетак година [1], предложено је један нови метод индиректног одређивања вероватноће грешке преко мерења оптичког Q фактора који се мери за кратко време, а затим се прорачунава вероватноћа грешке. Мерење Q фактора се у суштини своди на мерење односа сигнал-шум када се шаље бинарна јединица и када се шаље бинарна нула, а претпоставља се да постоји само адитивни Гаусов шум. Због појаве интерсимболне интерференције проблем се усложњава али се може узети у обзир применом специјалне комбинације осмоструке комбинације три бита [2]. У литератури су анализирани и случајеви када Гаусова апроксимација не даје тачне резултате као што је случај код примене оптичких појачавача [3].

2. ОПТИЧКИ Q ФАКТОР

Према добро познатом и често коришћеном Гаусовом моделу телекомуникационог система, претпоставља се да систем преноси информације комбинацијом бинарних јединица и нула у присуству Гаусовог адитивног шума. У одређеним тренуцима времена одабирања одлучује се да ли је послата јединица или нула, према томе да ли је сигнал у том тренутку изнад или испод прага одлучивања. Следећа претпоставка је да се при слању јединице јавља шум већег интензитета (веће стандардне девијације, σ_1) него шум при слању нуле (мања стандардна девијација, σ_0). Ова разлика последица је квантног шума који се повећава са нивоом сигнала. Под

претпоставком да су познате вероватноће слања јединица и нула, вероватноћа грешке израчунава се на основу релације

$$P_e = P(0)P(1|0) + P(1)P(0|1) \quad (1)$$

где су:

$P(0)$ - вероватноћа слања нула;

$P(1)$ - вероватноћа слања јединица;

$P(0|1)$ - условна вероватноћа пријема нуле кад се шаље јединица;

$P(1|0)$ - условна вероватноћа пријема јединице кад се шаље нула.

Према Гаусовом моделу, условне вероватноће се израчунавају на основу интеграла функције густине вероватноће које су облика

$$p_{0,1}(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{0,1}} e^{-\frac{(u-U_{0,1})^2}{2\sigma_{0,1}^2}} \quad (2)$$

где се индекс 0 односи на сигнал нуле, а 1 на сигнал јединице. По условом једнаких вероватноћа слања јединица и нула, и за одређени праг одлучивања U_{pr} , вероватноћа грешке се изражава преко функције вероватноће грешке ($erfc$ функције)

$$P_e(U_{pr}) = \frac{1}{4} \left[erfc\left(\frac{U_{pr}-U_0}{\sqrt{2}\sigma_0}\right) + erfc\left(\frac{U_1-U_{pr}}{\sqrt{2}\sigma_1}\right) \right] \quad (3)$$

Из услова $dP_e(U_{pr})/dU_{pr} = 0$, долази се до оптималног прага одлучивања

$$U_{pro} = \frac{\sigma_0 U_1 + \sigma_1 U_0}{\sigma_0 + \sigma_1} \quad (4)$$

и минималне вероватноће грешке

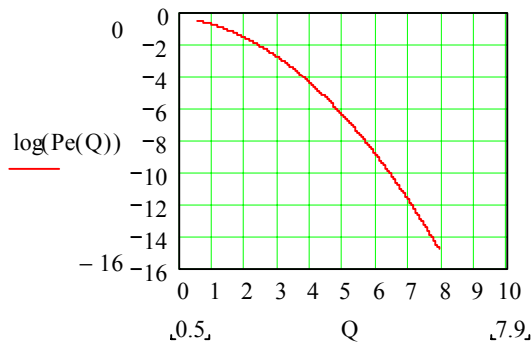
$$P_e(U_{pro}) = \frac{1}{2} erfc\left(\frac{U_1-U_0}{\sqrt{2}(\sigma_0+\sigma_1)}\right) \quad (5)$$

Величина

$$Q = \frac{U_1 - U_0}{\sigma_0 + \sigma_1} \quad (6)$$

представља максимални Q фактор. Релација која повезује вероватноћу грешке и Q фактор добија се сменом (6) у (5)

$$P_e(U_{pro}) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{Q}{\sqrt{2}}\right) \quad (7)$$



Сл.1. Зависност логаритма вероватноће грешке од Q фактора

Графичка зависност логаритма вероватноће грешке и Q фактора дата је на сл.1.

Према јед.(6) видимо да се овај фактор може наћи на основу познавања $U_1, U_0, \sigma_0, \sigma_1$, а онда се из јед.(7) може прорачунати вероватноћа грешке.

Класично мерење вероватноће грешке базира се на мерењу грешки пријема у неком интервалу времена. Овај интервал мора бити довољно дуг да би се појавило, типично, десет грешака. Ако је дигитални проток $f_{dp} [bit/s]$ а очекујемо да се мери вероватноћа грешке P_e , потребно време да се сакупи 10 грешака је дато релацијом

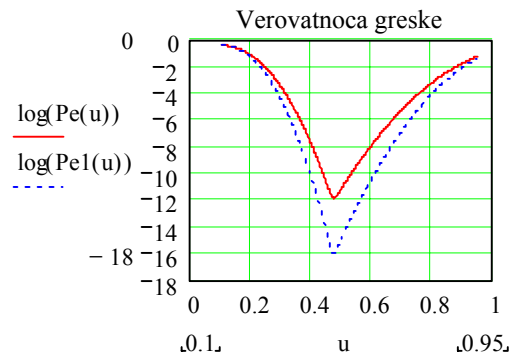
$$T[s] = \frac{10}{f_{dp} [bit/s] P_e} \quad (8)$$

На пример, у систему који ради на 10 Gbit/s, при вероватноћи грешке реда 10^{-12} , према јед.(8) време потребно да се појави десет грешака је 1000 s или близу 17 минута. Ако је вероватноћа грешке 10^{-14} , тада се временски интервал мерења пење на близу 28 сати! Ова времена су још четири пута дужа ако се ради о систему дигиталног протока 2.5Gbit/s при сличним вероватноћама грешки.

Индиректне мерне методе које се базирају на мерењу Q фактора смањују потребно време мерења јер се базирају на непосредном мерењу величина у јед.(6) или на намерном повећању вероватноће грешке тако што се мења праг пријема или тренутак одлучивања.

3. ПРОМЕНА ПРАГА ОДЛУЧИВАЊА

У овој анализи полазимо од јед.(3) и мењамо праг U_{pr} [4]. На сл.2. приказана је логаритамска функција вероватноће грешке дата једначином (3) на којој се јасно види значајна промена вероватноћа грешке са одступањем прага од оптималног.



Сл.2. Логаритам вероватноће грешке у функцији прага за два система са различитим варијансама шума који при оптималном прагу одлучивања имају вероватноће грешке 10^{-12} и 10^{-16} . Нумеричке величине су $U_1 = 1, U_0 = 0.1$ али су различите варијансе шума: $\sigma_0 = 0.046, \sigma_1 = 0.0828$ (систем са вероватноћом грешке при оптималном одабирању 10^{-12}) и $\sigma_0 = 0.0391, \sigma_1 = 0.07038$ (систем са вероватноћом грешке при оптималном одабирању 10^{-16}).

Уколико у пријемнику постоји могућност да се мења праг одлучивања требало би мерити вероватноћу грешке у функцији променљивих прагова лево и десно од оптималног прага тако да вероватноћа грешке буде у интервалу, на пример, 10^{-6} до 10^{-8} . Према релацији (8) тада се вероватноћа грешке брзо мери и траје од 1 ms до 100 ms. Екстраполацијом кроз мерне тачке лево и десно од минималне вероватноће грешке налази се минимална вероватноћа грешке, тј она грешка са којом систем ради у оптималном режиму рада.

Мерење вероватноће грешке по овом методу може се вршити само прекидом регуларног саобраћаја уз примену специјалног пријемника са променљивим прагом одлучивања [5].

Алтернативни поступак мерења вероватноће грешке обавља се са двојним пријемником од којих један пријемник има променљиви праг одлучивања а други је референтни пријемник. У овом случају пореде се вероватноће грешке једног и другог пријемника тако да се мерења на овај начин могу вршити у току регуларног рада система.

4. ПРОМЕНА ТРЕНУТКА ОДЛУЧИВАЊА

Промена тренутка одлучивања је друга могућност да се повећава вероватноћа грешке и опет смањи време мерења. У овом случају може се сматрати да се мења $(U_1 - U_0)_{\text{еф}}$ у јед.(5), тако што се променом тренутка одлучивања од оптималног при највећем отвору ока ка ивицама ока када $(U_1 - U_0)_{\text{еф}}$, односно ефективно Q

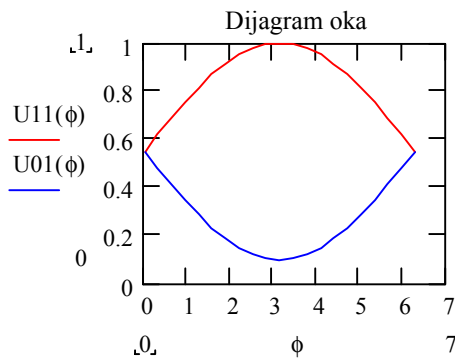
постаје нула. За илустрацију ове мерне технике претпоставићемо да је аналитички израз за «око» следећи:

$U_{11}(\phi) = U_S + (U_1 - U_S) \sin(\phi/2)$, у области логичке јединице,

$U_{01}(\phi) = U_S + (U_0 - U_S) \sin(\phi/2)$, у области логичке нуле, и

$$U_S = \frac{U_1 + U_0}{2}$$

Изглед дијаграма ока у једном сигнализационом интервалу T је дат на сл.3. Временска оса дата је у јединицама угла тако да је сигнализациони интервал T на дијаграму једнак 2π .

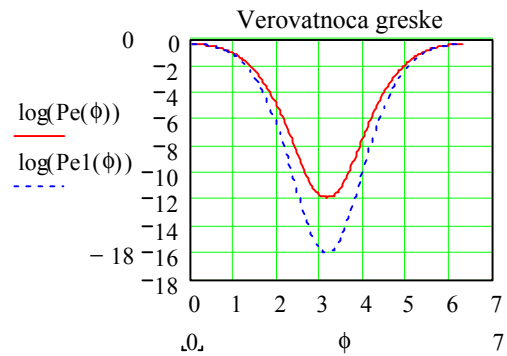


Сл.3. Дијаграм ока у једном сигнализационом интервалу: $U_1 = 1$; $U_0 = 0.1$.

С обзиром да се мења ниво сигнала јединице и нуле, претпоставићемо да се мењају и нивои шума сразмерно квадрату сигнала, тј.

$$\sigma_{11}(\phi)/\sigma_1 = \sqrt{U_{11}(\phi)/U_1} \text{ и } \sigma_{01}(\phi)/\sigma_0 = \sqrt{U_{01}(\phi)/U_0} \quad (9)$$

Претпоставићемо такође да се не мења праг одлучивања и да је исти као дат јед.(4). Вероватноћу грешке израчунавамо из јед.(3), али уместо фиксног U_1 стављамо $U_{11}(\phi)$, уместо фиксног U_0 стављамо $U_{01}(\phi)$. Такође смењујемо σ_1 са $\sigma_{11}(\phi)$, и σ_0 са $\sigma_{01}(\phi)$, према јед.(9). На сл.4. приказан је дијаграм логаритма вероватноће грешке за систем са оком као на сл.3, при истим параметрима као оним датим на сл.2, али када се мења тренутак одабирања.



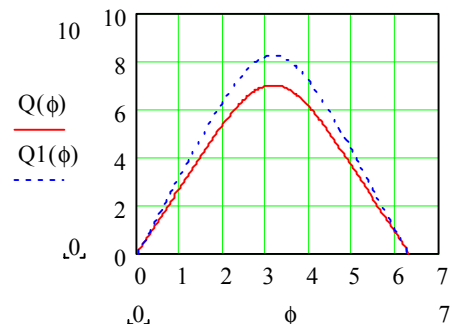
Сл.4. Логаритам вероватноће грешке у зависности од тренутка одабирања за два система са различитим варијансама шума који при оптималном прагу одлучивања имају вероватноће грешке 10^{-12} и 10^{-16} (подаци исти као они на сл.2).

Дијаграм вероватноће грешке на сл.4 сличан је оном на сл.2 који се добио при промени прага одлучивања. Избором погодних интервала одабирања, и сада би било могуће мерити мање вероватноће грешке од оне при максималном отвору ока, рецимо у опсегу 10^{-4} до 10^{-8} . Ова мерења обавила би се у интервалу $10 \mu s$ до $100 ms$! Вероватноћа грешке при оптималним условима прага и тренутка одлучивања добила би се затим екстраполацијом у пресеку кривих на сл.4. Приметимо да је овде минимум затупљенији него у случају промене прага (сл.2), али не треба заборавити да смо одабрали облик дијаграма ока и он у пракси може бити још неповољнији за интерполације ради добијања минималне вероватноће грешке система по методу промене тренутка одлучивања.

Уколико прихватимо да се при различитим тренуцима одабирања може дефинисати Q фактор на следећи начин

$$Q_v(\phi) = \frac{U_{11}(\phi) - U_{01}(\phi)}{\sigma_{11}(\phi) + \sigma_{01}(\phi)} \quad (10)$$

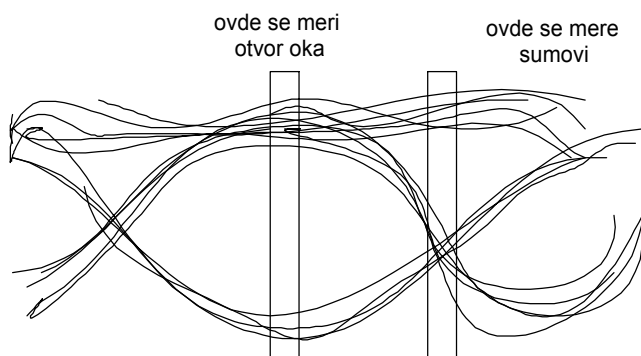
тада би промена Q фактора за два посматрана система била као дата на сл.5.



Сл.5. Променљиви Q фактор у зависности од тренутка одлучивања за два система са различитим вероватноћама грешки.

5. МЕТОД НАПОНСКОГ ХИСТОГРАМА

Овај метод базира се на коришћењу семплинг осцилоскопа којим се мере два напонска хистограма у центру дијаграма ока и стандардне варијансе шума на оба напонска нивоа [4] као што је показано на сл.(4).



Сл.6. Отвор ока и временски интервали у којима се мери отвор ока (U_1 и U_0) и шумови (σ_1 , σ_0).

Недостатак овог мерног поступка је што се при мерењу на брзим системима може добити мало одбирака и са брзим семплинг осцилоскопима. На пример, код система који ради са дигиталним протоком 10 Gbit/s, а примењује се семплинг осцилоскоп који узима милион одбирака у секунди, добија се један одбирак сваких 1000 импулса система. У том случају Q се добија са обухватањем само малог дела импулсне поворке. Још горе је и то што осцилоскоп додаје свој шум па је мерење шума скопчано са додатним грешкама. Уз све то додаје се и проблем необухватања интерсимболне интерференције и изобличења сигнала услед дисперзионих и нелинеарних ефеката, па је коначно мерење Q фактора прилично непоуздано, а тиме је и прорачун вероватноће грешке под знаком питања.

6. ЗАКЉУЧАК

Проблем мерења вероватноће грешке система код којих се захтева да раде са малим вероватноћама грешки, реда 10^{-12} и мањим, отежан је великим потребним временом за одабирање интервала у коме се јавља десетак грешака.

На пример, за систем који ради са више канала од 2.5 Gbit/s, за утврђивање грешке реда 10^{-12} , потребно време за један канал је реда једног сата. За убрзање мерења малих вероватноћи грешки развијају се мерни системи на бази оптичког Q фактора, који користе специјалне пријемнике са променљивим прагом (или праговима) одлучивања и променљивим тренуцима одлучивања.

У оквиру ITU-T ради се на стандардима и препорукама за пријемнике и поступке мерења али још нема коначних одлука. У овом раду дате су теоријске основе на основу којих се приступа истраживању нових решења за убрзано мерење вероватноћи грешке. Такође су дати и примери симулације за системе са променљивим прагом одлучивања и системе са променљивим тренутком одабирања. Поменут је и поступак мерења помоћу семплинг осцилоскопа али за сада овај прилаз не даје неке оптимистичке предикције.

7. РЕФЕРЕНЦЕ

- [1] N.S.Bergamo, F.W. Kerfoot, and C.R. Davidson, "Margin measurements in optical amplifier systems". *IEEE Photonics Technology Letters*, vol.5,no.3, pp.304-306, 1993.
- [2] C.J. Anderson and J.A.Lyle, "Technique for evaluating system performance using Q in numerical simulations exhibiting intersymbol interference", *Electronics Letters*, vol.30, no.1, pp.71-72, 1994.
- [3] F.Matera and M.Settembre, "Role of Q-factor and of time jitter in the performance evaluation of optically amplified transmission systems", *IEEE Journal of Selected Topics in Quantum Electronics*, vol.6, no.2, pp.308-316, 2000.
- [4] K. Willox, "Q Factor: the Wrong Answer for Service Providers and Equipment Manufacturers", www.comsoc.org/livepubs/ci1/Public/2003/Feb/ocstesting.html.
- [5] IEC 61280-2-8, "Fibre Optic Communication Subsystem Basic Test Procedure, Part 2-8 Test Procedures for Digital Systems, Determination of Low BER Using Q-Factor Measurements."

Abstract – The problem of measuring of small BER has set seeking for methods which are not based on direct measuring of at least a dozen wrongly received pulses during some time interval, because, these time intervals are too long for advanced networks. There is theory given in this article together with simulationally measured methods, which increase BER in a way that the change measurement threshold or decisions moment are made on purpose. For these measuring methods, special receivers which measure optical Q factor indirectly, are used. Directly measuring method of optical Q factor is explained with help of sampling oscilloscope.

OPTICAL Q FACTOR AND BER - PREFERENCES AND DISADVANTAGES

Andrija Kunarac, Aleksandar Marincic